1 Funkcje wypukłe

Nierówność Höldera. Jeśli $p, q > 1$ spełniają $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q} \quad \text{dla dowolnych } a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n.$$

Nierówność Jensena. Jeśli $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest wypukła, $x_1, \ldots, x_n \in D$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ oraz $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, to

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Zadanie 1.1. (nierówność Minkowskiego) Dla dowolnych ciągów rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ i dowolnego $1 \leqslant p \leqslant \infty$ zachodzi nierówność trójkąta

$$\|a + b\|_{\ell_n^p} \leqslant \|a\|_{\ell_n^p} + \|b\|_{\ell_n^p},$$

gdzie $\|x\|_{\ell_n^p} := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$.
Wskazówka. Zastosować nierówność Höldera dla $|a_k||a_k + b_k|^{p-1}$ oraz $|b_k||a_k + b_k|^{p-1}$.

Zadanie 1.2. Dowieść, że jeśli prosta ma trzy różne punkty wspólne z wykresem funkcji wypukłej, to ma z nim wspólny cały odcinek.

Zadanie 1.3. Wykazać, że dla dowolnych parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ równanie $\operatorname{tg} x = ax + b$ ma co najwyżej trzy różne rozwiązania w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Zadanie 1.4. Udowodnić, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła i ograniczona z góry, to jest stała.

Zadanie 1.5. Czy funkcja wypukła i ograniczona $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ musi być stała?

Zadanie 1.6. Niech $\alpha, \beta, \gamma > 0$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Dowieść, że wtedy:

(a) $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$;

(b) $\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

Wyjaśnić, kiedy zachodzi równość.

Zadanie 1.7. Dla $0 < x \leqslant y$ wyprowadzić nierówności

$$e^y \geqslant e^x + e^x(y-x), \qquad \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x} + \frac{y-x}{2\sqrt{x}}, \qquad \ln y \leqslant \ln x + \frac{y-x}{x}.$$

Wskazówka. Wykres funkcji wypukłej leży nad styczną, a funkcji wklęsłej – pod.

Zadanie 1.8. Z nierówności Jensena (dla funkcji $\ln x$ i x^p) wyprowadzić klasyczne nierówności między średnimi dla $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$ oraz $p \geqslant 1$:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \left(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}$$

Zadanie 1.9. Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjmować wyrażenie

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c}$$

dla dodatnich liczb $a, b, c, d > 0$.

Wskazówka. W przypadku $a+b+c+d = 1$ zastosować nierówność Jensena dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Zadanie 1.10. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{\binom{n}{k}} < \sqrt{n^3 2^{n-1}}.$$

Wskazówka. Nierówność Jensena dla funkcji $\sqrt{x}$.

Zadanie 1.11. Korzystając z wypukłości funkcji tangens na przedziale $[0, \frac{\pi}{2})$, dowieść, że spośród n-kątów opisanych na danym okręg najmniejszy obwód i zarazem najmniejsze pole ma n-kąt foremny.
Wywnioskować, że wśród wielokątów opisanych na okręgu o promieniu r kres dolny obwodów wynosi $2\pi r$, a kres dolny pól πr^2.

Zadanie 1.12. Korzystając z wklęsłości funkcji sinus na przedziale $[0, \pi]$, dowieść, że spośród n-kątów wpisanych w dany okręg największy obwód i zarazem największe pole ma n-kąt foremny.
Wywnioskować, że wśród wielokątów wpisanych w okrąg o promieniu r kres górny obwodów wynosi $2\pi r$, a kres górny pól πr^2.

2 Pochodna – wiadomości wstępne

Podstawowe własności.

$$(f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (1/g)' = -g'/g^2, \quad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Ponadto $\exp' = \exp$ i w konsekwencji $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Dalsze własności (wyprowadzone z tych wyżej).

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2, \quad (f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1}), \quad \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\Big)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

Zadanie 2.1. Z faktu $\exp' = \exp$ wyprowadzić, że pochodną logarytmu naturalnego ln jest funkcja $1/x$.

Zadanie 2.2. Wyprowadzić wzory

$$\sin' = \cos = \sqrt{1 - \sin^2}, \qquad \mathrm{tg}' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \mathrm{tg}^2$$

na przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wywnioskować, że

$$\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \mathrm{arc\,tg}' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Zadanie 2.3. Wyznaczyć pochodne następujących funkcji:

(a) a^x na $\mathbb{R}$ ($a > 0$ – stała)

(b) x^a na $\mathbb{R}^+$ ($a \in \mathbb{R}$ – stała)

(c) x^x na $\mathbb{R}^+$

Zadanie 2.4. Niech $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ będzie funkcją wielomianową.

(a) Wyznaczyć pochodne f kolejnych rzędów w punkcie $x = 0$: $f^{(k)}(0) = k! a_k$.

(b) Wywnioskować, że

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Dlaczego można sumować aż do nieskończoności?

(c) Uzasadnić wzór

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

w którym 0 zastąpiono dowolnym punktem $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2.5. Obliczyć pochodne funkcji $x\sqrt{9+\sin(\operatorname{tg} x)}$ oraz $\sin(x\sqrt{4+\sin(\operatorname{tg} x)})$ w punkcie $x = 0$.

Wskazówka. Po prostu skorzystać z definicji.

Zadanie 2.6. Przy założeniu, że funkcja f jest różniczkowalna w a, wyznaczyć granicę

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Czy z istnienia tej granicy wynika istnienie $f'(a)$?

Zadanie 2.7. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. W których punktach różniczkowalna jest funkcja $|f|$?

Zadanie 2.8. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x}) & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$$

jest

(a) ciągła na $\mathbb{R}$?

(b) różniczkowalna na $\mathbb{R}$?

(c) ma ciągłą pochodną na $\mathbb{R}$?

3 Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

i jego konsekwencje

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej Jeśli f jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b), to w pewnym punkcie $x \in (a, b)$ zachodzi równość $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. To proste twierdzenie pozwala badać przebieg zmienności funkcji poprzez analizę jej pochodnej; w szczególności pozwala zbadać, czy dana funkcja jest monotoniczna, wypukła etc.

Zadanie 3.1. Załóżmy, że funkcje ciągłe $f, g, h \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w (a, b). Wykazać, że w pewnym punkcie $x \in (a, b)$ zachodzi równość

$$\det \begin{bmatrix} f(a) & f(b) & f'(x) \\ g(a) & g(b) & g'(x) \\ h(a) & h(b) & h'(x) \end{bmatrix} = 0.$$

Wskazówka. Rozważyć funkcję $u(x) := \begin{bmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{bmatrix}$.

Zadanie 3.2. Wyprowadzić z poprzedniego zadania (przy tych samych założeniach) twierdzenie Cauchy'ego:

$$\exists\, x \in (a, b) \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad (\text{o ile } g(b) \neq g(a))$$

oraz twierdzenie Lagrange'a:

$$\exists\, x \in (a, b) \quad f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zadanie 3.3. Udowodnić, że jeśli funkcja $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ ma pochodną stale równą zero, to jest stała.

Zadanie 3.4. Wykazać, że jeśli funkcja różniczkowalna $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie różniczkowe $f'(x) = f(x)$ (dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$), to jest zadana wzorem $f(x) = ae^x$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

Wskazówka. Rozważyć pomocniczo funkcję $e^{-x} f(x)$.

Zadanie 3.5. Funkcja różniczkowalna $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ spełnia równanie $f'(x) = 1+(f(x))^2$ (dla wszystkich $x \in (a,b)$). Wykazać, że $b - a \leqslant \pi$.

Wskazówka. Rozważyć pomocniczo funkcję $\operatorname{arc\,tg}(f(x))$.

Zadanie 3.6. Zweryfikować wypukłość następujących funkcji:

(a) $-\sin x$ na przedziale $x \in [0,\pi]$;

(b) $\operatorname{tg} x$ na przedziale $x \in [0, \frac{\pi}{2})$;

(c) $\frac{1}{x}$ na przedziale $(0,\infty)$.

Zadanie 3.7. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Czy prawdą jest, że muszą istnieć punkty $a < 0 < b$, dla których $f'(0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?

4 Badanie przebiegu funkcji

Pochodna a zmienność funkcji. Niech f będzie funkcją różniczkowalną. Wtedy

- f ma lokalne ekstremum w $x_0 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$;
- f jest niemalejąca $\iff f' \geqslant 0$;
- f jest rosnąca $\iff f' \geqslant 0$ oraz f' nie zeruje się na żadnym odcinku;
- f jest wypukła $\iff f'$ jest niemalejąca.

Analogicznie można scharakteryzować, kiedy f jest nierosnąca, malejąca czy wklęsła.

Zadanie 4.1. Wykazać, że dla $0 \leqslant x < 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\ln(1-x) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

Wskazówka. Zbadać pochodną różnicy tych dwóch funkcji.

Zadanie 4.2. Udowodnić, że funkcja arc tg spełnia nierówność Lipschitza ze stałą 1:

$$|\operatorname{arc\,tg}(x) - \operatorname{arc\,tg}(y)| \leqslant |x-y| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4.3. Uzasadnić nierówności

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} < \operatorname{arc\,tg} 2 < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Wskazówka. $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$

Zadanie 4.4. (a) Wykazać, że $f(x) = x + \sin x$ jest funkcją (ściśle) rosnącą na $\mathbb{R}$.

(b) Wywnioskować, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest bijekcją, więc istnieje funkcja odwrotna $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Dla jakich $y \in \mathbb{R}$ istnieje (skończona) pochodna $(f^{-1})'(y)$?

Zadanie 4.5. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem $f(x) = x + \sin(2x)$.

(a) Wyznaczyć jej punkty krytyczne, czyli punkty zerowania się pochodnej.

(b) Czy f posiada minimum lub maksimum globalne?

(c) Czy f posiada minimum lub maksimum lokalne?

(d) Naszkicować wykres f' oraz f.

Zadanie 4.6. Niech $0 < \varepsilon < 1$. Wykazać, że istnieje dokładnie jedna funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca równanie

$$f(x) - \varepsilon \sin(f(x)) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Uzasadnić, że jest ona różniczkowalna.

Zadanie 4.7. Znaleźć minimum objętości stożków opisanych na kuli o promieniu r.

Zadanie 4.8. Spośród wszystkich deltoidów o obwodzie l wskazać ten o największym polu.

Zadanie 4.9. Dwukrotnie różniczkowalna funkcja $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ spełnia $|f''(x)| \leqslant M$ dla $x \in (0,1)$. Wykazać, że spełnia ona warunek Lipschitza $|f(x) - f(y)| \leqslant N$ z pewną stałą N.

Zadanie 4.10. Dana jest funkcja

$$f\colon (0, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sin(2x)}.$$

Wykazać, że f osiąga swój kres dolny w dokładnie jednym punkcie $u \in (0, \frac{\pi}{2})$, podobnie swój kres górny w dokładnie jednym punkcie v. Wyznaczyć sumę $u + v$.

5 Praca domowa – pochodna

Zasady rozwiązywania. Poniższe cztery zadania należy samodzielnie rozwiązać, a następnie złożyć poprzez stronę kursu na Moodle. Preferowana forma to dokument zredagowany elektronicznie, dopuszczalny jest też skan odręcznych rozwiązań pod warunkiem czytelności pisma oraz skanu. Można i należy korzystać z twierdzeń dowiedzionych na wykładzie i ćwiczeniach, ale w przypadku twierdzeń bez nazwy/nazwiska należy wskazać na założenia i tezę wykorzystywanego twierdzenia.

Termin. Rozwiązania należy oddać **do piątku 17 marca** (do północy).

Zadanie 5.1. Wyznaczyć pochodną funkcji

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x - [x]) \sin^2(\pi x).$$

Zadanie 5.2. Dana jest dwukrotnie różniczkowalna funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniająca $f''(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że jest to funkcja liniowa: istnieją takie $a, b \in \mathbb{R}$, że $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5.3. Znaleźć kresy górny i dolny funkcji

$$f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x},$$

a jeśli są one przyjmowane, to określić, w których punktach. Następnie rozstrzygnąć, która z liczb jest większa: π^e czy e^π.

Zadanie 5.4. Dana jest funkcja ciągła $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna w $(0, 2)$. Udowodnić, że jeśli $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, to $f''(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in (0, 2)$.

6 Wzór Taylora

Wzorem Taylora możemy nazwać wzór

$$\begin{aligned} & f(x) = T_n^a f(x) + R_n^a f(x), \\ \text{gdzie}\quad & T_n^a f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k && \text{– „wielomian Taylora”,} \\ & R_n^a f(x) := f(x) - T_n^a f(x) && \text{– „reszta”.} \end{aligned}$$

Interesujące jest to, co (przy odpowiednich założeniach) można powiedzieć o reszcie:

- $R_n^a f(x) = o((x-a)^n)$, to znaczy $\dfrac{R_n^a f(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x\to a} 0$ (własność Peano);
- $R_n^a f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ dla pewnego ξ pomiędzy a i x (postać Lagrange'a);
- $R_n^a f(x) = (x-a)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(a+t(x-a))}{n!}(1-t)^n \,\mathrm{d}t$ (postać całkowa).

Zadanie 6.1. Sprawdzić, że jeśli f jest wielomianem stopnia $\leqslant n$, to $T_n^a f \equiv f$ niezależnie od $a \in \mathbb{R}$ (por. Zadanie 2.4).

Zadanie 6.2. Jeśli f jest różniczkowalna n-krotnie, to $(T_n^a f)'(x) = (T_{n-1}^a f')(x)$.

Zadanie 6.3. Załóżmy, że f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna. Wyprowadzić wzór $\partial_a(T_n^a f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n$ i wywnioskować z niego postać Lagrange'a reszty. *Uwaga.* Symbol ∂_a oznacza *pochodną cząstkową względem zmiennej* a, czyli po prostu pochodną funkcji $a \mapsto T_n^a f(x)$ (dla ustalonego x).

Zadanie 6.4. Uzasadnić, że wielomian Taylora jest jedynym wielomianem stopnia $\leqslant n$, dla którego reszta posiada własność Peano. Innymi słowy, jeśli $f(x)-p(x) = o((x-a)^n)$ dla pewnego wielomianu p stopnia $\leqslant n$, to $p \equiv T_n^a f$.

Zadanie 6.5. Dla funkcji $f(x) = (\cos x + \sin x)e^x$ wyznaczyć wielomian Taylora $T_2^0 f(x)$ na dwa sposoby:

- wyznaczając pochodne $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ i podstawiając do wzoru;
- korzystając z rozwinięć

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \sin x = x + o(x^2), \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x + o(x^2).$$

Zadanie 6.6. Wykazać, że dla $x \to 0$

(a) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$;

(b) $x \sin\sqrt{x} = O(x^{3/2})$;

(c) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$.

Wyjaśnienie symboli. $f = o(g)$ oznacza zbieżność $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, $f = o(g)$ oznacza ograniczoność $\frac{f(x)}{g(x)}$ na pewnym (nakłutym) otoczeniu $x = 0$, $f \sim g$ oznacza zbieżność $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$.

Zadanie 6.7. Jakiego rzędu względem x przy $x \to 0$ jest wyrażenie

$$\sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}?$$

Zadanie 6.8. Oblicz pochodną rzędu 2022 i 2023 w zerze dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Zadanie 6.9. Wyznaczyć granice:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2\sin x - 2\operatorname{tg} x}{x^5}\right) \qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{x^3}$$

Zadanie 6.10. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Zadanie 6.11. Obliczyć

(a) e z dokładnością do 10^{-9};

(b) $\sqrt{5}$ z dokładnością do 10^{-4}.

Zadanie 6.12. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 spełniającą $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Wykazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = e^{-x^2/2}.$$

Uwaga. Ten fakt jest kluczowym składnikiem dowodu centralnego twierdzenia granicznego, które mówi (w dużym uproszczeniu) o uniwersalności rozkładu normalnego.

Zadanie 6.13. Wyznaczyć granicę $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 6x^2} - ax$ w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6.14. (funkcja niebędąca swoim szeregiem Taylora) Rozważmy funkcję

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Wykazać, że jest to funkcja gładka (tzn. różniczkowalna dowolnie wiele razy).

Zadanie 6.15. Skonstruować funkcję gładką

(a) f dodatnią na zbiorze $(-1, 1)$ i zerową poza nim;

(b) g o wartościach w $[0, 1]$, spełniającą $g(x) = 1$ dla $x \geqslant 1$ i $g(x) = 0$ dla $x \leqslant -1$;

(c) h o wartościach w $[0, 1]$, spełniającą $h \equiv 1$ na $[-1, 1]$ i $h \equiv 0$ poza $(-2, 2)$.

Wskazówka. Konstrukcję funkcji f, g, h można oprzeć na funkcji z poprzedniego zadania, i to nawet bez wchodzenia w szczegóły jej konstrukcji.

Zadania dodatkowe

Ponieważ temat jest ważny i bogaty w konsekwencje, polecam pochylić się również nad poniższymi zadaniami, których nie będziemy omawiać na zajęciach.

Zadanie 6.16. Podać wielomian Taylora $T_3^0 f(x)$ dla funkcji $f(x) = \sin^2(3x)$.

Zadanie 6.17. Wyznacz wielomian Taylora w zerze do wyrazu x^n włącznie. Oblicz $f^{(n)}(0)$.

(a) $x\cos x - \sin x$, $n = 7$;

(b) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n = 4$;

(c) $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{30}}$, $n = 2$;

(d) $\ln(\cos x)$, $n = 6$.

Zadanie 6.18. Wyznaczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{\sin x - x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

Zadanie 6.19. Obliczyć
$$\lim_{x\to\infty} x\left(e - \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x\right).$$
Wskazówka. Może się okazać przydatna reguła de l'Hospitala.

Zadanie 6.20. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i $\frac{f(x)}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$, to $f''(0) = 0$. Uzasadnić, że założenie o dwukrotnej różniczkowalności jest istotne.

Zadanie 6.21. Niech $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 spełniającą $f(0) = 0$. Wyznaczyć granicę
$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\lfloor 1/\sqrt{x} \rfloor} f(kx).$$

Zadanie 6.22. Oszacuj błąd przybliżenia $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ dla $|x| < \frac{1}{2}$.

Zadanie 6.23. Wykorzystując wzór Taylora, wykazać nierówności

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{dla } x > 0.$$

Zadanie 6.24. Załóżmy, że f jest n-krotnie różniczkowalna. Wyprowadzić następujący wzór na resztę:

$$R_n^a f(x) = \frac{Q_x^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{gdzie} \quad Q_x(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Uwaga. Gdy f ma jedną pochodną więcej, wzór ten można wyprowadzić z Zadania 6.3.

7 Praca domowa – wzór Taylora

Errata 2023-03-30 W Zadaniu 7.2a zmieniono $x \to \infty$ na $x \to 0$, a w Zadaniu 7.4 poprawiono współczynnik przy x^4 z $\frac{1}{4}$ na $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$. W związku z tymi zmianami termin oddania pracy domowej został przesunięty z 31 marca na 5 kwietnia.

Termin. Rozwiązania należy oddać **do piątku 5 kwietnia** (do północy).

Zadanie 7.1. Wyznaczyć kresy zbioru wartości funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

Zadanie 7.2. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{x^3}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$

Zadanie 7.3. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right).$$

Zadanie 7.4. Wykazać, że dla $|x| < 1$ błąd przybliżenia

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

nie przekracza $\frac{1}{720}$.

8 Zbieżność ciągów funkcyjnych

$$\begin{aligned} f_n \to f \text{ punktowo} \quad &\equiv \quad \forall\, x\ \forall\, \varepsilon\ \exists\, n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \text{ dla } n \geqslant n_0 \\ f_n \rightrightarrows f \text{ jednostajnie} \quad &\equiv \quad \forall\, \varepsilon\ \exists\, n_0\ \forall\, x \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \text{ dla } n \geqslant n_0 \end{aligned}$$

Zadanie 8.1. Czy szereg

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

zbiega punktowo? Czy jednostajnie? Czy niemal jednostajnie?

Zadanie 8.2. Wykazać, że granica punktowa funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

Zadanie 8.3. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągów

(a) $f_n(x) = n^2 \cdot \dfrac{1 - \cos(\frac{x}{n})}{x}$ na zbiorach $[1, \infty)$ i $(0, 1]$;

(b) $g_n(x) = n^3 x \exp(-nx^2)$ na odcinku $[0, 1]$.

Zadanie 8.4. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x}{\exp(2x)}$. Definiujemy ciąg funkcyjny przez wielokrotne składanie funkcji:

$$f_n(x) = f^{\circ n}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ razy}}(x).$$

Zbadać zbieżność jednostajną tego ciągu na zbiorze $x \geqslant 0$.

Zadanie 8.5. Dla danej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określmy rodzinę jej przesunięć, czyli funkcji $f_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_t(x) = f(x - t)$. Wykazać, że

(a) f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $t_n \to 0$ zachodzi zbieżność punktowa $f_{t_n} \to f$ na $\mathbb{R}$.

(b) f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $t_n \to 0$ zachodzi zbieżność jednostajna $f_{t_n} \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Zadanie 8.6. Wykazać, że jeśli ciąg wielomianów P_n zbiega jednostajnie do f na $\mathbb{R}$, to funkcja f też jest wielomianem.

Wskazówka. Rozważyć konsekwencje warunku Cauchy'ego dla takiego ciągu.

Zadanie 8.7. Zbadać zbieżność ciągów f_n i f_n' na zadanym zbiorze:

(a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ na $\mathbb{R}$;

(b) $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ na $[-1, 1]$.

Zadanie 8.8. Wykazać, że jednostajna granica funkcji ograniczonych jest ograniczona. Czy twierdzenie to prawdziwe jest w przypadku granicy punktowej?

Zadanie 8.9. Niech f będzie dowolną funkcją rzeczywistą i określmy $f_n(x) := \frac{\lfloor nf(x) \rfloor}{n}$. Udowodnić, że $f_n \rightrightarrows f$.

Uwaga. To zadanie pokazuje, że każda funkcja rzeczywista jest jednostajną granicą funkcji o wartościach wymiernych.

Zadanie 8.10. Wykazać, że ciąg wielomianów P_n określonych rekurencyjnie poprzez

$$P_0(x) = 0, \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$$

jest jednostajnie zbieżny na $[0, 1]$ do funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Zadanie 8.11. Wykazać, że istnieje ciąg wielomianów jednostajnie zbieżny na przedziale $[-1, 1]$ do funkcji $|x|$.

Wskazówka. Skorzystać z poprzedniego zadania.

Zadanie 8.12. Dowieść, że jeśli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną, to ciąg funkcyjny $f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ zbiega do f' niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Zadanie 8.13. Powiemy, że f_n zbiega do f *w sposób ciągły na* $A \subseteq \mathbb{R}$, jeśli dla każdego ciągu $x_n \in A$ zbieżnego do $x \in A$ zachodzi zbieżność $f_n(x_n) \to f(x)$.

(a) Jeśli $f_n \to f$ w sposób ciągły na A, to f jest funkcją ciągłą na A (nawet gdy f_n są nieciągłe).

(b) Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na A i f jest funkcją ciągłą, to $f_n \to f$ w sposób ciągły na A.

(c) Na przykładach $A = [0,1]$ i $A = (0,1)$ udowodnić lub obalić twierdzenie odwrotne: czy z ciągłości f i ciągłej zbieżności $f_n \to f$ wynika zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$?

Zadanie 8.14. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną następujących ciągów funkcyjnych:

(a) $x^n - x^{2n}$ na $[0,1]$

(b) $\frac{x^n}{1+x^n}$ na zbiorach $[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},2]$, $[2,\infty)$

(c) $\frac{x}{n}\ln(x/n)$ na $(0,1)$

(d) $e^{n(x-1)}$ na $(0,1)$

(e) $\frac{1}{n}\ln(1+e^{nx})$ na $\mathbb{R}$

(f) $x \operatorname{arc\,tg}(nx)$ na $(0,\infty)$

(g) $(1+x^n)^{1/n}$ na $[0,2]$

(h) $n\sin(x/n)$ na $[-\pi,\pi]$

9 Szeregi funkcyjne

Kryterium Weierstrassa. Jeśli $|f_n(x)| \leqslant M_n$ dla dowolnego x oraz szereg $\sum M_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny.

Tw. o różniczkowaniu granicy. Jeśli ciąg f_n' zbiega jednostajnie, a $f_n(x_0)$ zbiega dla jakiegoś x_0, to f_n zbiega jednostajnie do funkcji, której pochodną jest $\lim f_n'$.

Zadanie 9.1. Zbadać zbieżność następujących szeregów funkcyjnych:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(n^2(1+x^2))\right)$ na $\mathbb{R}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{n-1}$ na $[-1,1]$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2 x}$ na $[0,\infty)$

Zadanie 9.2. Wskazać przykład ciągu funkcji nieujemnych ciągłych $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dla których szereg $\sum f_n$ jest jednostajnie zbieżny, ale nie można zastosować kryterium Weierstrassa (tj. szereg $\sum \sup f_n$ jest rozbieżny).

Zadanie 9.3. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $\mathbb{R}$.

Zadanie 9.4. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$$

jest dobrze określona i ciągła na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Zadanie 9.5. Wykazać, że funkcja

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln\left(1 + n^2 x^2\right)$$

jest

(a) dobrze określona i ciągła na $\mathbb{R}$;

(b) klasy C^1 na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(c) nieróżniczkowalna w $x = 0$.

Zadanie 9.6. ★ Co prawda szereg $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ nie jest zbieżny do $1/2$, ale

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \xrightarrow{x \to 1^-} \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow{x \to 0^+} \frac{1}{2}.$$

Wskazówka. Osobno zbadać dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n^x} \pm \frac{1}{(n+1)^x}\right)$.

10 Szeregi potęgowe

Wzór Cauchy'ego-Hadamarda. Jeśli $M := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \infty$, to szereg $\sum a_n x^n$ jest niemal jednostajnie zbieżny na $(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M})$. Ponadto pochodne tego szeregu otrzymujemy, różniczkując wyraz po wyrazie.

Zadanie 10.1. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Wykazać, że szereg $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, a następnie wyprowadzić wzór $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

Wskazówka. Wyprowadzić oszacowanie $F_n \leqslant 2^n$. Żeby wyznaczyć funkcję $F(x)$, porównać ją z funkcjami $xF(x)$ i $x^2F(x)$.

Uwaga. Korzystając z równości $\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_+-x} - \frac{1}{x_--x}\right)$ (gdzie $x_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$), rozwinięcia w szereg geometryczny oraz Zadania 10.2, można wyprowadzić jawny wzór na F_n.

Zadanie 10.2. Udowodnić, że jeśli funkcja f jest zadana przez zbieżny szereg potęgowy $\sum a_n x^n$, to jest równa swojemu szeregowi Taylora. Wywnioskować, że dwa różne szeregi potęgowe nie mogą być zbieżne do tej samej funkcji.

Zadanie 10.3. Rozwinąć następujące funkcje w szereg potęgowy:

(a) $\sin^2 x$

(b) $\frac{1}{(1-x)^3}$

(c) $\operatorname{arc\,tg} x$

(d) $\ln(1+x)$

Zadanie 10.4. Korzystając z Zadania 10.3, wyprowadzić równości

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln(2)$$

Zadanie 10.5. Podać przykład szeregu potęgowego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o promieniu zbieżności 1, dla którego

(a) szereg zbiega w punkcie 1, tym samym funkcja f przedłuża się do funkcji ciągłej na $(-1, 1]$;

(b) szereg nie zbiega w punkcie 1, a granica $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ jest nieskończona;

(c) szereg nie zbiega w punkcie 1, a funkcja f mimo to przedłuża się do funkcji ciągłej na $(-1, 1]$.

Wskazówka. Prawdziwe jest następujące twierdzenie: jeśli szereg zespolony $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ma promień zbieżności R, to funkcja nim zadana nie przedłuża się do funkcji ciągłej na domkniętym kole $\overline{B_R}$. Nie jest to jednak prawdą w przypadku rzeczywistym.

Zadanie 10.6. Załóżmy, że promień zbieżności szeregu potęgowego $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wynosi 1, ponadto istnieje granica $g := \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Wykazać, że jeśli zachodzi któryś z warunków

(a) $a_n \geqslant 0$,

(b) $na_n \to 0$,

to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego granicą jest g.

Zadanie 10.7. (o granicy górnej i dolnej) Uzasadnić następujące charakteryzacje granicy górnej ciągu (a_n):

(a) $\inf\limits_{n\geqslant 0} \sup\limits_{m\geqslant n} a_n$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{m\geqslant n} a_n \right)$;

(c) najmniejsza liczba M taka, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi $a_n < M + \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n (o ile taka istnieje, wpp. $+\infty$);

(d) największa liczba będąca granicą podciągu (a_n).

Sformułować analogiczne charakteryzacje dla granicy dolnej.

Zadanie 10.8. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności następujących szeregów potęgowych:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n x^n \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2} \qquad \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^{n!}$$

Zadanie 10.9. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności następujących szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{3^n} x^n (1-x)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\operatorname{tg} x)^n$

Zadanie 10.10. Dany jest szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o dodatnim promieniu zbieżności. Wyznaczyć n-tą pochodną w zerze $F^{(n)}(0)$ dla funkcji $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$.

11 Całka nieoznaczona

Zadanie 11.1. Obliczyć $\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$:

(a) przez części, przyjmując $f(x) = \sin x$ i $g'(x) = \cos x$,

(b) przez części, przyjmując $f'(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$,

(c) przez podstawienie, przyjmując $y = \sin x$,

(d) przez podstawienie, przyjmując $y = \cos x$,

(e) stosując wzór $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Zadanie 11.2. Wyznaczyć całki nieoznaczone:

$$\int x^2\sqrt{2x^3-3} \qquad \int xe^x \qquad \int xe^{x^2} \qquad \int e^x \sin x$$
$$\int \frac{\ln(x)}{x} \qquad \int \ln x \qquad \int (\ln x)^2 \qquad \int \frac{1}{x^2-1}$$
$$\int \operatorname{arc\,tg} x \qquad \int \frac{x^4}{x^2+1} \qquad \int \frac{x^2-1}{x^4+1} \qquad \int \sqrt{e^x-1}$$

Zadanie 11.3. Wyprowadzić wzór rekurencyjny pozwalający wyznaczyć $\int \cos^n x$ i $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Wskazówka. Całkowanie przez części ($\cos = \sin'$) i podstawienie ($x = \operatorname{tg} u$).

Zadanie 11.4. Wyznaczyć całki nieoznaczone:

$$\int x^2 e^{-x} \qquad \int xe^x \sin x \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{2x^2+3}$$
$$\int \arcsin x \qquad \int x \operatorname{arc\,tg} x \qquad \int x \arccos x$$
$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \qquad \int \cos^3 x \qquad \int e^{\sqrt{x}} \qquad \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$

Zadanie 11.5. (metoda ostatniej szansy) Wykazać, że podstawienie $t = \operatorname{tg}(x/2)$ pozwala sprowadzić całkę z funkcji wymiernej od $\sin x$, $\cos x$ do całki z funkcji wymiernej od t. Innymi słowy, wyprowadzić wzory postaci

$$\sin x = f(t), \qquad \cos x = g(t), \qquad \mathrm{d}x = h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zadanie 11.6. (o funkcjach hiperbolicznych) Definiujemy tzw. *hiperboliczne funkcje trygonometryczne* $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

(a) Sprawdzić, że zachodzą równości $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$, $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

(b) Wyprowadzić jawnym wzorem odwrotności funkcji $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$ *(parzystość* $\cosh$ *sprawia, że nie da się tej funkcji odwrócić globalnie)*

(c) Wyznaczyć całki nieoznaczone

$$\int \sqrt{1+x^2}, \qquad \int \sqrt{x^2-1}, \qquad \int \sqrt{1-x^2}.$$

Uwaga. Warto porównać definicje i własności sinh, cosh z definicjami i własnościami cos, sin: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ oraz $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

Zadanie 11.7. Wyznaczyć całki nieoznaczone:

(a) $\sin^3 x \cos^2 x$

(b) $\sin^4 x \cos^3 x$

(c) $\sin^2 x \cos^4 x$

(d) $\dfrac{1}{\sin^2 x \cos x}$

(e) $\dfrac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x \cos x + 2\cos^3 x}$

(f) $\dfrac{\cos^5 x}{1+\sin^2 x}$

(g) $\dfrac{1}{1+\sin x + \cos x}$

Zadanie 11.8. Wyznaczyć całki nieoznaczone z następujących funkcji wymiernych:

(a) $\dfrac{1}{x^4-1}$

(b) $\dfrac{1}{x(1+x^2)}$

(c) $\dfrac{1}{5x^2+2x+1}$

(d) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

12 Całka oznaczona

Zadanie 12.1. Obliczyć następujące całki oznaczone:

$$\text{a)} \int_1^2 \frac{2x^2}{x^3+1} \qquad \text{b)} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \qquad \text{c)} \int_0^1 \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$$
$$\text{d)} \int_0^{\pi/2} x \sin x \qquad \text{e)} \int_1^4 \frac{\ln x}{x} \qquad \text{f)} \int_0^2 x e^{x^2}$$
$$\text{g)} \int_0^3 x^2(2x^3+4)^2 \qquad \text{h)} \int_0^3 x\sqrt{9-x^2} \qquad \text{i)} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x$$

Zadanie 12.2. Obliczyć pochodne następujących funkcji zmiennej x:

$$\int_1^x t(1+t^2)^5 \,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{\sin x} 1-t^2 \,\mathrm{d}t \qquad \int_{x-1}^{x^2} e^{t^2} \,\mathrm{d}t$$

Zadanie 12.3. Uzasadnić, że

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ dla } x \in [a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

zarówno dla całki Riemanna, jak i całki Newtona.

Zadanie 12.4. Dla każdej z poniższych całek niewłaściwych wyznaczyć zakres parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których całka ta jest zbieżna:

$$\int_0^1 x^a \,\mathrm{d}x \qquad \int_1^\infty x^a \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^\infty x^a \,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 12.5. Obliczyć następujące całki niewłaściwe:

$$\text{a)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \qquad \text{b)} \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{c)} \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4}$$
$$\text{e)} \int_0^\infty x e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{f)} \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} \qquad \text{g)} \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x}$$

Wskazówka. Z Zadania 12.3 wynika, że można zastosować zasadę porównawczą analogiczną do tej dla szeregów o wyrazach nieujemnych.

Zadanie 12.6. Obliczyć granicę:

$$\lim_{x\to 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Zadanie 12.7. (a) Niech φ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że

$$\int_0^\pi x\varphi(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \varphi(\sin x).$$

(b) Wyznaczyć całkę

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 12.8. Niech $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}((x^2-1)^n)^{(n)}$. Wyznaczyć

$$a_{nk} := \int_{-1}^1 P_n(x)P_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 12.9. (wzór Wallisa) Niech $a_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ dla $n \geqslant 0$. Wykazać, że

(a) $a_0 = \pi/2$, $a_1 = 1$;

(b) $a_n = \frac{n-1}{n}a_{n-2}$, w konsekwencji $a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$, $a_{2n+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$;

(c) (a_n) jest nierosnący oraz $\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \to 1$;

(d) $\dfrac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$.

13 Przejście do granicy pod znakiem całki

Zadanie 13.1. Wykazać następujące twierdzenia o przejściu do granicy pod znakiem całki:

(a) Jeśli $f_k \in C^0([a,b])$ oraz $f_k \rightrightarrows f$, to $\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Jeśli $f_k \in C^0([0,\infty))$ oraz $f_k \overset{\text{n.j.}}{\rightrightarrows} f$, a ponadto funkcje f_k posiadają wspólne ograniczenie $|f_k(x)| \leqslant g(x)$ przez funkcję g spełniającą $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ (tzw. majorantę), to $\int_0^\infty f_k(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Wskazówka. W b) zastosować ograniczenie $|\int_M^\infty f_k(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \int_M^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{M\to\infty} 0$.

Zadanie 13.2. Wyznaczyć następujące granice:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^4 \int_n^{n+1} \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^5+1} \right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^3 \int_n^{2n} \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^5+1} \right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{3\pi} \int_\pi^{2\pi} \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{arc\,tg}(nx)} \right)^n$

Wskazówka. W c) skorzystać z faktu, że funkcja $f(y) := \frac{y}{\operatorname{arc\,tg}(y)} - \frac{y}{\pi/2}$ zbiega do $\frac{4}{\pi^2}$ przy $y \to \infty$.

Zadanie 13.3. Wykazać równość

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

Wskazówka. Rozwinąć funkcję podcałkową w szereg.

Zadanie 13.4. Dana jest funkcja dwóch zmiennych $f(t,x)$ taka, że funkcje f oraz $\partial_t f$ (czyli pochodna funkcji $t \mapsto f(t,x)$) są jednostajnie ciągłe i ograniczone. Wykazać, że wówczas

$$\partial_t \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \partial_t f(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Uwaga. Przykład zastosowania *przejścia z pochodną pod znak całki* można zobaczyć w Zadaniu 13.5. Zainteresowanym polecam tekst K. Conrada Differentiating under the integral sign.

Zadanie 13.5. Szukamy wartości całki $J := \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. W tym celu określmy funkcję

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{dla } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Uzasadnić, że $F(0) = \pi/2$ oraz $F(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

(b) Wyprowadzić równość $F'(t) = -2e^{-t^2}\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$.
(można przyjąć, że dozwolone jest przejście z różniczkowaniem pod znak całki)

(c) Wyznaczyć wartość $F(t)|_0^\infty = -2J^2$.

(d) Wywnioskować, że $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Wskazówka. Skorzystać z poprzednich dwóch zadań.

Zadanie 13.6. Korzystając ze znajomości całki $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, wyprowadzić równość

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$$

na dwa sposoby:

(a) całkując przez części n razy;

(b) różniczkując n razy funkcję $f(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{d}t$.

14 Praca domowa – całka

Zasady rozwiązywania. Poniższe cztery zadania należy samodzielnie rozwiązać, a następnie złożyć poprzez stronę kursu na Moodle. Preferowana forma to dokument zredagowany elektronicznie, dopuszczalny jest też skan odręcznych rozwiązań pod warunkiem czytelności pisma oraz skanu. Można i należy korzystać z twierdzeń dowiedzionych na wykładzie i ćwiczeniach, ale w przypadku twierdzeń bez nazwy/nazwiska należy wskazać na założenia i tezę wykorzystywanego twierdzenia.

Termin. Rozwiązania należy oddać **do piątku 2 czerwca** (do północy).

Zadanie 14.1. Wyznaczyć następujące całki nieoznaczone:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^2}$

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$

Zadanie 14.2. Obliczyć całki oznaczone

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \sin(\cos x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (uwaga: jest to całka niewłaściwa)

Zadanie 14.3. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t}{x^3}.$$

Wskazówka. Zastosować podstawienie $t = xu$ lub regułę de l'Hospitala.

Zadanie 14.4. Załóżmy, ze funkcja $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, a ciąg

$$a_n := \int_0^1 f(n+x)\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

jest zbieżny: $a_n \to a$. Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x$.

15 Całka Riemanna

Zadanie 15.1. Wyznaczyć granice:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$

(b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{k^3}{n^4}e^{k^2/n^2}$

Zadanie 15.2. Rozważmy funkcję

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{\pi}{x^2} & \text{dla } x>0,\\ 0 & \text{dla } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Przekonać się, że funkcja f jest różniczkowalna wszędzie, ale f' nie jest całkowalna w sensie Riemanna na $[0,1]$. Ponadto zachodzą równości $\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\infty$ oraz $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(1)-f(0)$ w sensie całki niewłaściwej.

Zadanie 15.3. (całka Henstocka–Kurzweila) Załóżmy, że funkcja $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny (w przypadku 0 i 1 mamy do czynienia z pochodną jednostronną). Wykazać, że

(a) Dla dowolnego $y\in[0,1]$ oraz $|x-y|\leqslant\delta(y,\varepsilon)$ zachodzi $|f(x)-f(y)-f'(y)(x-y)|\leqslant\varepsilon|x-y|$.

(b) Dla dowolnego $y\in[0,1]$ oraz $x_1\leqslant y\leqslant x_2$, $|x_1-x_2|\leqslant\delta(y,\varepsilon)$ zachodzi $|f(x_2)-f(x_1)-f'(y)(x_2-x_1)|\leqslant\varepsilon|x_1-x_2|$.

(c) Dla dowolnego podziału $[0,1]$ na przedziały $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ oraz dowolnego wyboru punktów $t_i\in[x_i,x_{i+1}]$ zachodzi

$$\forall_{i=0,\ldots,n-1}\ |x_i-x_{i+1}|\leqslant\delta(t_i,\varepsilon)\implies\left|(f(1)-f(0))-\sum_{i=0}^{n-1}f'(t_i)(x_{i+1}-x_i)\right|\leqslant\varepsilon.$$

Uwaga. Zapis $\leqslant\delta(y,\varepsilon)$ należy rozumieć jako nierówność $\leqslant\delta$ poprzedzoną formułą „dla każdego $y\in[0,1]$ i każdego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$”.

Zadanie 15.4. (podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego) Niech $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1.

(a) Wykazać, że wartość $\delta(y, \varepsilon)$ w poprzednim zadaniu można wybrać niezależnie od y, to znaczy:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in [0,1]$$
$$|x-y| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y) - f'(y)(x-y)| \leqslant \varepsilon |x-y|.$$

(b) Wywnioskować, że funkcja f' jest całkowalna w sensie Riemanna, a jej całką jest $f(1) - f(0)$.

Zadanie 15.5. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że

(a) $\displaystyle\int_0^1 f(x) g(nx)\, \mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0$, gdzie $g(x) = (-1)^{\lfloor 2x \rfloor}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x$

Zadanie 15.6. Dana jest funkcja ciągła $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ taka, że $\int_0^1 f(x) x^n\, \mathrm{d}x = 0$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że $f \equiv 0$.

Wskazówka. Rozważyć szczególny przypadek, gdy f jest wielomianem.

Zadanie 15.7. Dla $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ całkowalnych, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ wyprowadzić nierówność Höldera

$$\int_a^b |f(x) g(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, \mathrm{d}x \right)^{1/q}.$$

Wskazówka. Powtórzyć dowód nierówności Höldera dla ciągów: $\sum a_k b_k \leqslant (\sum a_k^p)^{1/p} (\sum b_k^q)^{1/q}$.

16 Praca domowa – zastosowania całki

Zasady rozwiązywania. Poniższe cztery zadania należy samodzielnie rozwiązać, a następnie złożyć poprzez stronę kursu na Moodle. Preferowana forma to dokument zredagowany elektronicznie, dopuszczalny jest też skan odręcznych rozwiązań pod warunkiem czytelności pisma oraz skanu. Można i należy korzystać z twierdzeń dowiedzionych na wykładzie i ćwiczeniach, ale w przypadku twierdzeń bez nazwy/nazwiska należy wskazać na założenia i tezę wykorzystywanego twierdzenia.

Termin. Rozwiązania należy oddać **do środy 14 czerwca** (do północy).

Zadanie 16.1. Dla $m = 1, 2, 3, \ldots$ wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

Zadanie 16.2. Wyprowadzić nierówności

$$\tfrac{1}{4}n^2\pi \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} \leqslant \tfrac{1}{4}n^2\pi + n \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zadanie 16.3. Uzasadnić, że funkcja beta Eulera

$$B(a, b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$$

określona dla $a, b > 0$ spełnia tożsamość

$$bB(a+1, b) = aB(a, b+1).$$

Zadanie 16.4. Dana jest nieujemna funkcja ciągła $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ o maksimum równym M. Dowieść, że

$$\left(\int_a^b f(x)^n\,\mathrm{d}x\right)^{1/n} \xrightarrow{n\to\infty} M.$$